

1. 3. Sayı Kümelerinin Özellikleri

1		6	
2		7	
3		8	
4		9	
5		10	

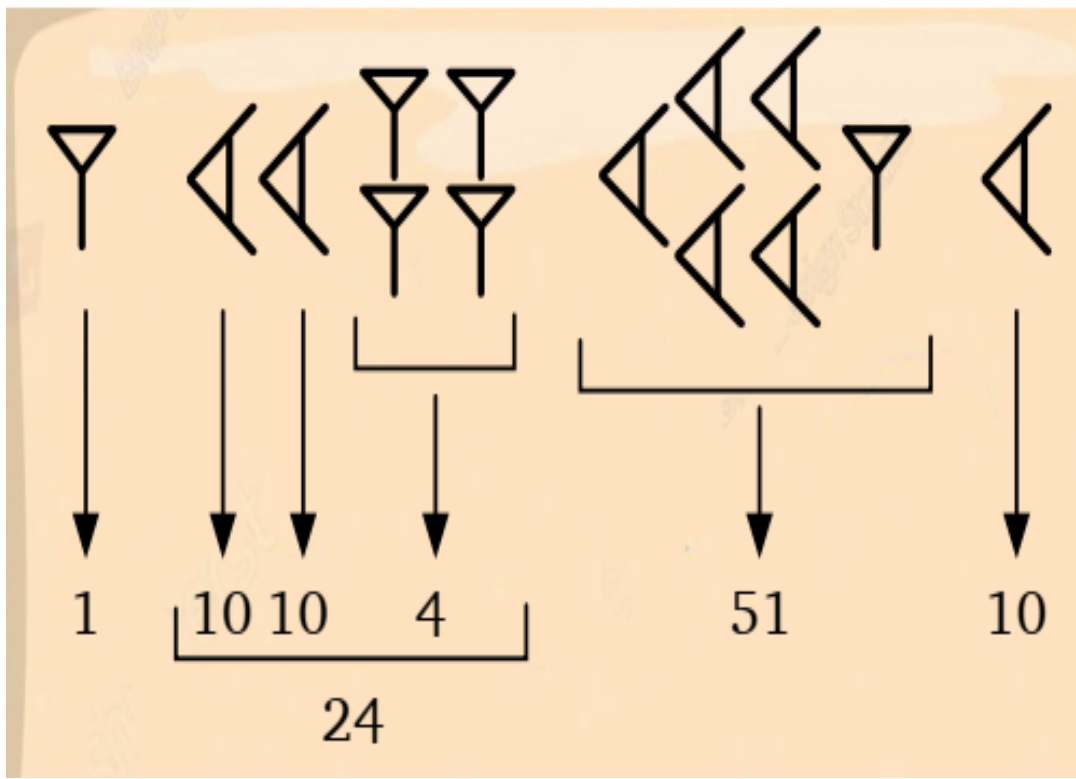
Eski çağlardan itibaren insanlar mevsim ve ay döngülerini takip etmek, avladıkları hayvan sayısının miktarını belirtmek gibi durumlar için mağara duvarlarına veya ağaç gövdelerine attıkları çentiklerden yararlanmışlardır.

1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6

$$\frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{5} \rightarrow \frac{1}{5}$$

Antik Mısır medeniyetinde yaklaşık 3000 yıl önce sayılar, hiyerogliflerin tekrar edilmesiyle ifade edilmiştir. Büyük sayıları göstermek için onun katlarını tercih eden Antik Mısırlılar, kesirleri birim kesirler yardımıyla göstermiştir.



Konumsal yazım, matematikte sayıların değerinin sayının yazılışındaki konumuna bağlı olduğu bir sayı yazım sistemidir.

Sembolleri tekrar ederek büyük sayıları yazmak zorlaşınca bazı medeniyetler, sayıların gösteriminde konumsal yazımı tercih etmiştir.

Mezopotamya coğrafyasında MÖ 1894 – MÖ 539 yılları arasında hüküm süren Babilliler, altmışlık sayı sistemiyle konumsal yazım kullanmıştır.

Sayı kümelerinin tarihî gelişimi, matematiksel düşüncenin insan ihtiyaçlarını karşılamak için nasıl değiştiğini göstermektedir. Her bir yeni kavram ve sayı kümesi, matematiksel bilgi birikimini genişletmiş ve matematiğin uygulamalarını çeşitlendirmiştir.

Sayı Kümeleri

$\mathbb{N} = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , \dots \}$ doğal sayılar kümesidir.

$\mathbb{Z} = \{ \dots , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 \}$ ise tam sayılar kümesidir.

$\mathbb{Z}^- = \{ \dots , -4 , -3 , -2 , -1 \}$ negatif tamsayılar kümesini,

$\mathbb{Z}^+ = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , \dots \}$ ise pozitif tamsayılar kümesini

gösterir. $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{ 0 \} \cup \mathbb{Z}^+$ tam sayılar kümesini verir.

Tanım: 1) $a , b \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilen sayılara “ rasyonel sayılar ” adı verilir ve \mathbb{Q} harfi ile gösterilir.

2) İki tam sayının oranı şeklinde yazılamayan sayılara ise “ irrasyonel sayılar ” adı verilir ve \mathbb{Q}' harfi ile gösterilir.

$$\frac{2}{3} \in \mathbb{Q} , 5 \in \mathbb{Q} , \sqrt{16} \in \mathbb{Q} , -1\frac{3}{7} \in \mathbb{Q} \text{ 'dır.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi = 3,14\dots \\ \sqrt{2} = 1,41\dots \\ \sqrt{7} = 2,645\dots \end{array} \right\} \in \mathbb{Q}' \text{ 'dir. Yani irrasyonel sayılardır.}$$

Çünkü iki sayının oranı şeklinde yazılamaz.

Sayı kümeleri arasında $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ bağıntısı vardır.

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R} \quad \text{Rasyonel sayılar ile irrasyonel sayılar küme-}$$

sinin oluşturduğu kümeye “reel (gerçek) sayılar” kümesi adı verilir ve \mathbb{R} harfi ile gösterilir.

$\sqrt{-11}$, $\sqrt{-25}$, . . . gibi içerisinde negatif sayı bulunan kare köklü sayılar birer reel sayı olamazlar.

Sayı kümelerinde eşitsizlik konusunun kurallarını bilmemiz gerekir.

Eşitsizlik konusunda bilmemiz gerekenler :

- $a \leq a$ (Bir sayı kendisinden küçüktür ya da kendisine eşittir ya da bağlacı olduğundan doğru hüküm bildirir.)

- $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$ olur.

- $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$

$a < b$ ve $b < c$ ise $a < c$ olur.

- $a \leq b$ ise $a + c \leq b + c$

$a < b$ ise $a + c < b + c$ olur.

(Eşitsizliğin iki tarafına aynı

sayı eklenir yada çıkartılırsa eşitsizlik yönü değişmez.)

- $a \leq b$ ise $c \in \mathbb{R}^+$ için $a \cdot c \leq b \cdot c$

(Eşitsizliğin

$$a < b \text{ ise } c \in \mathbb{R}^+ \text{ için } a \cdot c < b \cdot c$$

iki tarafı aynı

$$a \leq b \text{ ise } c \in \mathbb{R}^+ \text{ için } \frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$$

pozitif sayı ile

$$a < b \text{ ise } c \in \mathbb{R}^+ \text{ için } \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \text{ olur.}$$

çarpılır ya da

bölünürse eşitsizlik yönü değişmez.)

- $a \leq b$ ise $c \in \mathbb{R}^-$ için $a \cdot c \geq b \cdot c$

(Eşitsizliğin

$$a < b \text{ ise } c \in \mathbb{R}^- \text{ için } a \cdot c > b \cdot c$$

iki tarafı aynı

$$a \leq b \text{ ise } c \in \mathbb{R}^- \text{ için } \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$$

pozitif sayı ile

$a < b$ ise $c \in \mathbb{R}^-$ için $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ olur. **çarpılır ya da**

bölünürse eşitsizlik yönü değişir.)

Örneğin ; $-3 < 5$ için eşitsizliği -4 ile çarpalım.

$$-3 \cdot (-4) < 5 \cdot (-4)$$

$12 < -20$ olması mümkün değildir.

Dolayısıyla doğru yazım $12 > -20$ olmalıdır.

• **$0 < a < b$ ise $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ olur.**

• **$a < b < 0$ ise $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ olur.**

• **$0 < a < b$ ise $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $a^n < b^n$ olur.**

Soru : Aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur ?

A) $4 < 8$ ise $\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$ olur.

B) $-2 < 5$ ise $-\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$ olur.

C) $0 < 11$ ise $\frac{1}{0} > \frac{1}{11}$ olur.

D) $-9 < -3$ ise $-\frac{1}{9} > -\frac{1}{3}$ olur.

Soru : x , y , c gerçek sayılar için $x < y$ ve $k < 0$ olmak üzere,

I. $x + k < y + k$

II. $x \cdot k > y \cdot k$

III. $\frac{x}{k} < \frac{y}{k}$

IV. $k - x > k - y$

ifadelerinden kaç tanesi doğrudur ?

Soru : $x < y < 0 < z$ olduğuna göre, aşağıdaki ifadelerden hangisi daima doğrudur ?

A) $\frac{x + y}{z} > 0$

B) $\frac{x \cdot z}{y} < 0$

C) $x^2 < y^2$

D) $x + z > y + z$

E) $\frac{x - z}{y} > 0$

Soru : $\frac{1}{12} < x < \frac{1}{5}$ ise; **A)** $3x$ 'in çözüm aralığı bulunuz.

B) $x - 4$ 'ün çözüm aralığı bulunuz.

Soru : A , B ve C bitkilerinin boyları (cm) ile ilgili aşağıdaki bilgiler veriliyor.

“ A bitkisinin boyu, C bitkisinin boyundan uzundur.

B bitkisinin boyu, C bitkisinin boyuna eşit veya C bitkisinin boyundan kısadır. ”

A ve C , B ve C , A ve B bitkilerinin boylarını karşılaştırarak aralarındaki ilişkiyi eşitsizlik sembolleriyle ifade ediniz.

Soru : “ $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $b < a$ olmak üzere $b < \frac{a + b}{2} < a$ olur.” önermesinin doğru olup olmadığını cebirsel olarak ispatlayınız.

Soru : Gerçek sayılarda sıralama özellikleri yardımıyla “ x, y, m ve $n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x < y$ ve $m < n$ için $x + m < y + n$ olur.” önermesinin doğru olup olmadığını cebirsel olarak ispatlayınız.

Soru : Aşağıda bir önerme ve bu önermenin ispatı gösterilmiştir.

Önerme : x, y, z ve $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x \leq y$ ve $z \leq t$ ise $x - t \leq y - z$ olur.

1. Adım : $x \leq y$ eşitsizliğinden $x - t \leq y - t$ eşitsizliği elde edilir.

2. Adım : $z \leq t$ ise $-t \leq -z$ eşitsizliği elde edilir.

3. Adım : $-t \leq -z$ eşitsizliğinden $-z + y \leq -t + y$ eşitsizliği elde edilir. $(y - z \leq y - t)$

4. Adım : 1. ve 3. adımda elde edilen eşitsizliklerden yani

$$\left. \begin{array}{l} x - t \leq y - t \\ y - z \leq y - t \end{array} \right\} x - t \leq y - z \text{ olur.}$$

Buna göre ispata ait adımların hangisinde ilk defa hata yapılmıştır ?

Soru : Aşağıda bir önerme ve bu önermenin ispatı gösterilmiştir.

Önerme : a ve b pozitif gerçekte sayılar olsun. $a < b$ ise $a + b > b$ olur.

1. Adım : $a < b$ eşitsizliğinden $a \cdot a < b \cdot a$ işleminden

$a^2 < b \cdot a$ eşitsizliği elde edilir. (İki taraf a ile çarpılır.)

2. Adım : $a^2 - b^2 < b \cdot a - b^2$ eşitsizliği elde edilir. (İki taraftan b^2 çıkartılır.)

3. Adım : $(a - b) \cdot (a + b) < b \cdot (a - b)$ eşitsizliği elde edilir. (İki taraf çarpanlarına ayrılır.)

4. Adım : $\frac{(a - b) \cdot (a + b)}{a - b} < \frac{b \cdot (a - b)}{a - b}$ işleminden

$a + b < b$ elde edilir. (İki taraf aynı çarpana bölünür.)

Buna göre ispata ait adımların hangisinde ilk defa hata yapılmıştır ?

Arada Olma

Bir sayı kümesindeki herhangi iki sayı arasında aynı sayı kümesinden başka bir sayının yer alması, o kümenin arada olma özelliğine sahip olduğunu gösterir.

Örneğin bir mühendis, bir köprü veya bina tasarlarken yapının taşıyacağı maksimum ve minimum yükleri hesaplar. Arada olma özelliği sayesinde bu iki yük arasındaki herhangi bir değerin yapıyı güvenle taşıyabileceğini bilir ve buna göre tasarım yapar.

Soru : Sayı kümelerine ait elemanların arasında o sayı kümesine ait başka bir örnek eleman var ise yazarak tabloyu doldurunuz.

Hangi Sayılar Arasında Arandığı	\mathbb{N}	\mathbb{Z}	\mathbb{Q}	\mathbb{R}
11 ile 13				

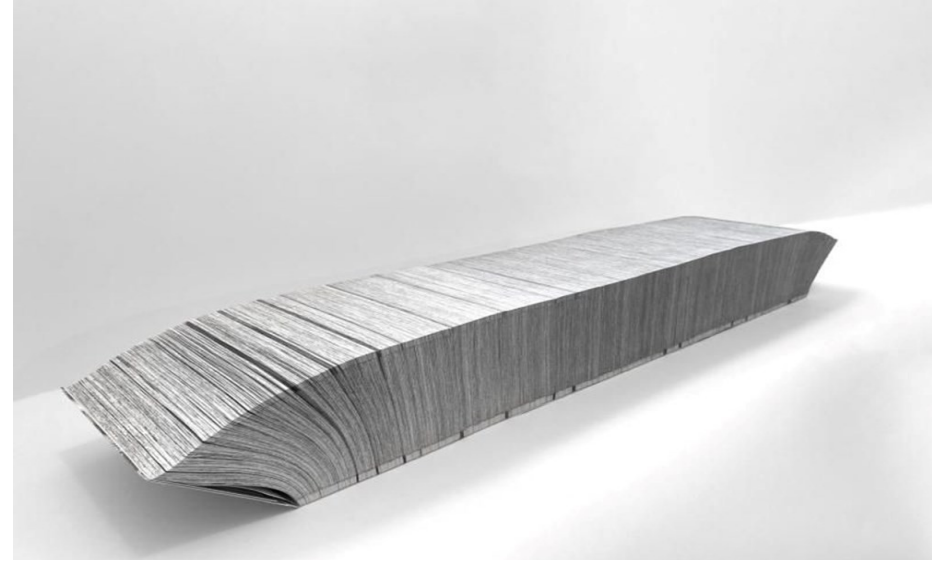
2 ile 3				
- 5 ile - 2				
4,2 ile 4,4				
$\sqrt{3}$ ile $\sqrt{19}$				
$\frac{5}{7}$ ile $\frac{6}{7}$				
$\frac{11}{2}$ ile $\frac{23}{3}$				

Soru : Altta verilen bilgilerden kaç tanesi doğrudur ?

- Ardışık iki doğal sayı (\mathbb{N}) arasında herhangi bir doğal sayı yer almaz.
- Ardışık iki tam sayı (\mathbb{Z}) arasında herhangi bir tam sayı yer almaz.
- \mathbb{N} ve \mathbb{Z} kümelerinde arada olma özelliği yoktur.
- Herhangi iki rasyonel sayı (\mathbb{Q}) arasında istenen sayıda rasyonel sayı bulunabilir.
- Herhangi iki gerçekte (\mathbb{R}) sayı arasında istenen sayıda gerçekte sayı bulunabilir.

Soru : Dünyanın en ağır kitaplarından birisinin kütlesi 8 kg ile 9 kg arasındadır. Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

A) Kitabın kütlesi (kg) doğal sayı veya tam sayı olabilir mi ? Nedenleriyle açıklayınız.



B) Kitabın kütlesinin (kg) hangi sayı kümeleri ile ifade edilebileceğini ifade ediniz.

Soru : $\frac{3}{5}$ ile $\frac{4}{5}$ rasyonel sayıları arasına;

A) Bir tane rasyonel sayı yerleştiriniz.

B) İki tane rasyonel sayı yerleştiriniz.

C) Üç tane rasyonel sayı yerleştiriniz.

Soru : 2,02 ile 2,03 sayıları arasına yazılabilecek tam kısmı 2 ve virgülden sonraki kısmı üç basamaklı olacak şekilde kaç sayı yazılabilir ? Bu sayıları bulunuz.

Soru : 3000 metre koşu yarışı
sıralamaları için dakikanın yüzdelik
gösterimine göre tespit yapılmıştır.
Bu sporculardan birincinin yarışı
bitirme süresi 18,6a ve ikincinin
yarışı bitirme süresi 18,6b olarak
ölçölüyor. a rakamı bir asal sayı ise
b 'nin hangi sayı değerlerini alabileceğini bulunuz.



Sayı Kümelerinin Dört İşleme Göre Kapalılığı

Bir sayı kümesinde yapılan işlemler (toplama, çıkarma, çarpma ve bölme) sonucunda elde edilen değerlerin yine o küme içinde kalması, algoritmalar ve formüllerin geliştirilmesi sırasında tutarlılık ve işlevsellik sağlar.

Bir kümedeki herhangi iki eleman bir işleme girdiğinde elde edilen sonuç yine aynı kümenin elemanı ise bu küme o işleme göre kapalıdır.

Bir A kümesini ele alalım. $x, y \in A$ için, $a + b$, $a - b$,

$a \cdot b$ ve $\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$ ise A kümesi bu dört işleme göre kapalı

olmuş olur.

Soru : Altta verilen kümelerin dört işleme göre kapalılık özelliğinin var olup olmadığını bulunuz. (Kümeden iki eleman seçeriz. İşlemler sonucu aynı kümeden çıkmazsa kapalılık özelliği yoktur.)

A) \mathbb{N} kümesi (Doğal Sayılar Kümesi)

Toplama İşlemi	Çıkarma İşlemi
Çarpma İşlemi	Bölme İşlemi

B) \mathbb{Z} kümesi (Tam Sayılar Kümesi)

Toplama İşlemi

Çıkarma İşlemi

Çarpma İşlemi

Bölme İşlemi

C) \mathbb{Q} kümesi (Rasyonel Sayılar Kümesi)

Toplama İşlemi

Çıkarma İşlemi

Çarpma İşlemi

Bölme İşlemi

D) $\mathbb{Q} - \{ 0 \}$ kümesi

Toplama İşlemi

Çıkarma İşlemi

Çarpma İşlemi

Bölme İşlemi

E) \mathbb{Q}' kümesi (İrrasyonel Sayılar Kümesi)

Toplama İşlemi

Çıkarma İşlemi

Çarpma İşlemi

Bölme İşlemi

F) \mathbb{R} kümesi (Reel Sayılar Kümesi)

Toplama İşlemi

Çıkarma İşlemi

Çarpma İşlemi

Bölme İşlemi

G) $\mathbb{R} - \{ 0 \}$ kümesi

Toplama İşlemi

Çıkarma İşlemi

Çarpma İşlemi

Bölme İşlemi

Soru: $A = \{ x \mid x = 2k, k \in \mathbb{Z} \}$ kümesinin dört işleme göre kapalı olup olmadığını inceleyiniz.

Soru : Rakamlar kümesinin dört işleme göre kapalı olup olmadığını inceleyiniz.

1. 4. Gerçek Sayıların İşlem Özellikleri

Değişme Özelliği : İki reel sayının toplamı veya çarpımında sayıların yerleri değiştirilirse sonuç değişmez.

$a, b \in \mathbb{R}$ için, $a + b = b + a$ ve $a \cdot b = b \cdot a$ 'dır.

Örneğin 2 ile 6 reel sayılarını alalım.

$$2 + 6 = 6 + 2 \qquad 2 \cdot 6 = 6 \cdot 2 \quad \text{eşitlikleri sağlanır.}$$

***** Çıkarma ve bölme işlemlerinde değişme özelliği yoktur.**

Örneğin 2 ve 6 reel sayıları için;

$$2 - 6 \neq 6 - 2 \quad \text{olur.} \quad \frac{6}{2} \neq \frac{2}{6} \quad \text{olur.}$$


Birleşme Özelliği : Toplama yada çarpma işleminde işlem sırası değişebilir. $a, b, c \in \mathbb{R}$ için;

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c \text{ yazılabilir.}$$

*** Çıkarma ve bölme işlemlerinde de birleşme özelliği yoktur.

Dağılma Özelliği: $a, b, c \in \mathbb{R}$ için;


$$a \cdot (b \mp c) = a \cdot b \mp a \cdot c \text{ olarak yazılabilir.}$$

Etkisiz Eleman: Toplama işleminde etkisiz eleman **0**,
çarpma işleminde ise etkisiz eleman **1** 'dir.

$$a + 0 = 0 + a = a \text{ ve } a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \text{ 'dır.}$$

Yutan Eleman: Çarpma işleminde yutan eleman **0** 'dır.

Ters Eleman : $a \in \mathbb{R}$ için ;

A) $a + (-a) = (-a) + a = 0$ **Toplama işleminde a 'nın tersi $-a$ 'dır.**

B - $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

Çarpma işleminde a 'nın tersi $\frac{1}{a}$ 'dır. ($a \neq 0$ olmalıdır.)

Soru : $\frac{2}{3}$ sayısının çarpma ve toplama işlemlerine göre terslerini bulup, toplamalarını elde ediniz.

Soru : $1\frac{3}{5}$ sayısının çarpmaya göre tersi $\frac{a}{b}$ ise $a - b = ?$

Soru : $2a - 8$ sayısı çarpmanın yutan elemanı, $6 - b$ 'de toplama-
nın etkisiz elemanı ise $\frac{b}{a}$ 'nın toplamaya göre tersi kaç olur ?

Soru : $x + 2$ sayısının toplamaya göre tersi $2x - 22$ olduğuna göre $x = ?$

Önerme Kavramı

Matematikte kavramlar, kavramlara ait özellikler, işlemlerden elde edilen sonuçlar sözel veya sembolik olarak ifade edilebilir. Bu ifadelerden bazıları kesin doğru ya da kesin yanlış bir hüküm bildirir.

Kesin doğru ya da kesin yanlış bir hüküm bildiren ifadelere

“ önerme ” denir. Önermeler sözel veya sembolik dille ifade edilebilir.

Soru : Aşağıdaki önermelerin doğru veya yanlış olma durumlarını belirleyerek tabloyu doldurunuz. (X işareti koyunuz)

Önerme	Doğru	Yanlış
Türkiye'nin en büyük gölü Van Gölü'dür.		
Rakamlar 9 tanedir.		

$5 + 2 \cdot (-3) - (-2)^3 = 7$ 'dir.		
Negatif bir tam sayının tüm kuvvetleri yine negatiftir.		
Tüm çift sayılar 4 ile tam bölünür.		
Tek basamaklı asal sayıların toplamı 17 'dir.		
Reel sayılar kümesi en kapsamlı sayı kümesidir.		
Sıfır harici sayıların sıfıra bölümü tanımsızdır.		
54627062814 sayısı 3 ile tam bölünür.		
İki basamaklı en büyük negatif tam sayı - 99 'dur.		

Matematikte Sembolik Dil

Gerçek sayılarda işlem özelliklerini ifade eden önermeler, **sembolik dil** kullanılarak yazılabilir.

Matematikte sembolik dilin kullanılmasının çeşitli faydaları bulunmaktadır. Sembolik dil, matematiksel ifadelerin standartlaştırılmasına ve genelleştirilmesine olanak sağlar. Matematiksel kavramlar ve ilişkiler daha net ve kesin bir şekilde ifade edilir. Bu da matematiksel problemleri çözmek ve matematiksel düşüncüyü geliştirmek için önemlidir.

Önüne geldiği elemanların çokluğunu belirten “ **bazı (en az bir)** ve **her** ” ifadelerine “ **niceleyiciler** ” adı verilir.

Her sözcüğü ile **bütün, tüm, tamamı** sözcükleri aynı anlama gelir. Her kelimesi yerine **\forall** sembolü kullanılır.

Bazı sözcüğü **en az bir** anlamındadır. **En az bir** yerine **\exists** sembolü kullanılır.

İki veya daha fazla önermeyi birlikte ifade edebilmek için bağlaç veya gerektirmelerden faydalanılır. Matematiksel ifadeler arasında bağlaçların (ve , veya , ya da) ve gerektirmelerin (ise , ancak ve ancak) sembolleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Bağlaçlar :

Sembol	\wedge	\vee	$\underline{\vee}$	\Rightarrow	\Leftrightarrow
Anlamı	Ve	Veya	Ya da	İse	Ancak ve Ancak

Sözel önermelerin matematiksel sembolik dil ile gösterimi aşağıdaki gibidir.

“ Her a , b gerçekte sayısı için a , b 'den büyükse a 'nın b 'den çıkarılmasıyla elde edilen değeri sıfırdan büyüktür. ”

“ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $a > b \Rightarrow b - a > 0$ olur.”

Soru : Aşağıda verilen sözel önermelerin matematiksel sembolik dil ile gösterimini yapınız ve doğru önerme olup olmadığını belirtiniz. **A)** “ En az bir tam sayının karesi 4 ’ tür.

B) “ Her x doğal sayısı sıfırdan büyüktür.”

C) “ a ve b gerçek sayılarının çarpımlarının değeri negatifse a ya da b negatiftir. ”

D) “ a ile b gerçek sayı olmak üzere a ile b ’nin çarpım sonucu, ancak ve ancak a veya b sayıları sıfıra eşitse sıfırdır. ”

E) “ a gerçek sayısı sıfıra eşit veya sıfırdan küçükse ve sıfıra eşit veya sıfırdan büyükse a sıfıra eşittir. ”

F) “ İki gerçek sayının çarpımının sıfırdan farklı olması için ancak ve ancak çarpanlarının ikisinin de sıfırdan farklı olması gerekmektedir. ”

Soru : Aşağıda verilen matematiksel sembolik dil ile yazılmış ifadelerin sözel olarak yazımını yapınız.

A) “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$ ”

B) “ $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 \geq 0$ ”

C) “ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $a < b \vee a - b < 0$ 'dır.”

D) “ $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ için $\exists b \in \mathbb{R}$ vardır. Öyle ki $a \cdot b = 1$ 'dir.”

E) “ $\exists x \in \mathbb{Z}, 0 < x < 1 \Rightarrow x^2 < x$ olur.”

Soru : Reel sayılarda çarpma işleminin değişme özelliği vardır. Bu ifadeye karşılık gelen matematiksel sembolik dil “ . . . $x, y \in \mathbb{R}$ için $x \cdot y = y \cdot x$ olur.” şeklinde gösterilmiştir.

Buna göre boşluğa aşağıdaki matematiksel sembollerden hangisi gelmelidir ?

A) $\underline{\quad}$

B) \Rightarrow

C) \exists

D) \forall

E) \wedge

Soru: “ $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x - y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2$ olur.”

önermesinin doğru olduğunu ispatlayınız.

Kural: Cebirsel ifadelerdeki değişkenlerin alacağı tüm gerçekte sayı değerleri için sağlanan eşitliklere “**özdeşlik**” adı verilir.

Aşağıda bazı özdeşlikler verilmiştir.

1) İki terimin toplamının karesi (tam kare) özdeşliği :

$$(x + y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2$$

2) İki terimin farkının karesi (tam kare) özdeşliği :

$$(x - y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2$$

Soru: $(x + y)^2 - (x - y)^2 = ?$

Soru : $\sqrt{\frac{9}{4} - \frac{15}{4} + \frac{25}{16}} = ?$

(Küçük paydalı olan işlemlerin sonucunu bulmak kolaydır. Ama payda eşitlemek zor ise tam kare özdeşliğinden yararlanılır. Kökün derecesi çift olduğundan içerden çıkan sonucun mutlak değeri alınır.)

Soru :

$$\sqrt{\frac{121}{100} - \frac{77}{40} + \frac{49}{64}} = ?$$

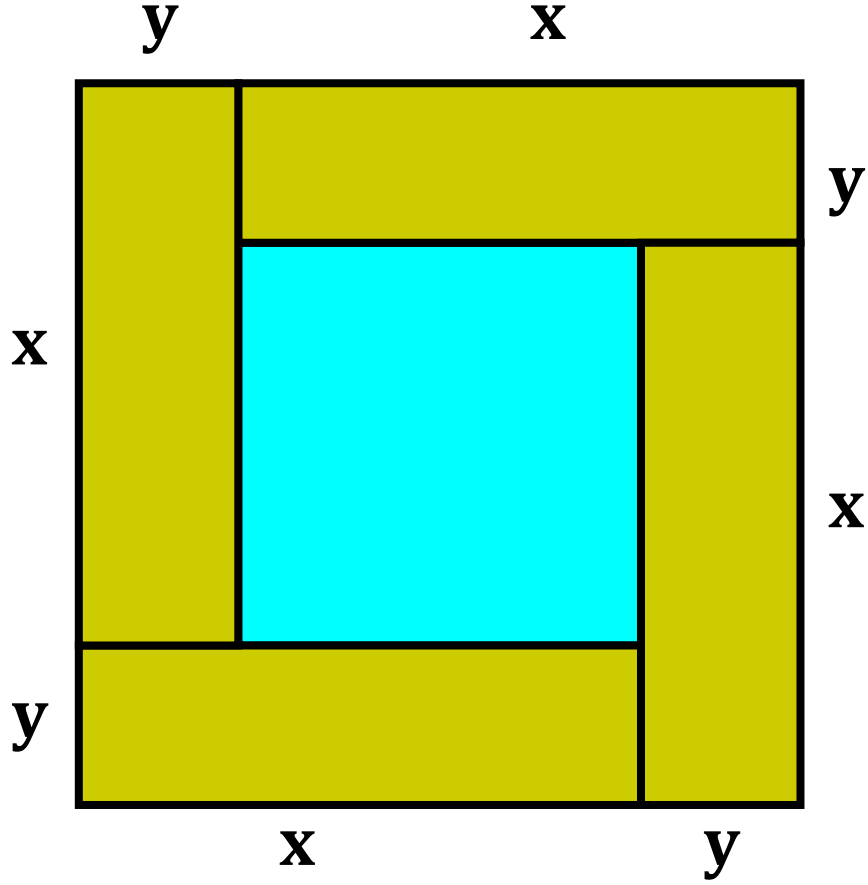
Soru : $x - 2y = 7$ ve $x \cdot y = 4$ ise $x^2 + 4y^2 = ?$

($x - 2y = 7$ eşitliğinin karesi alınır ve tam kare özdeşliğinden yararlanır.)

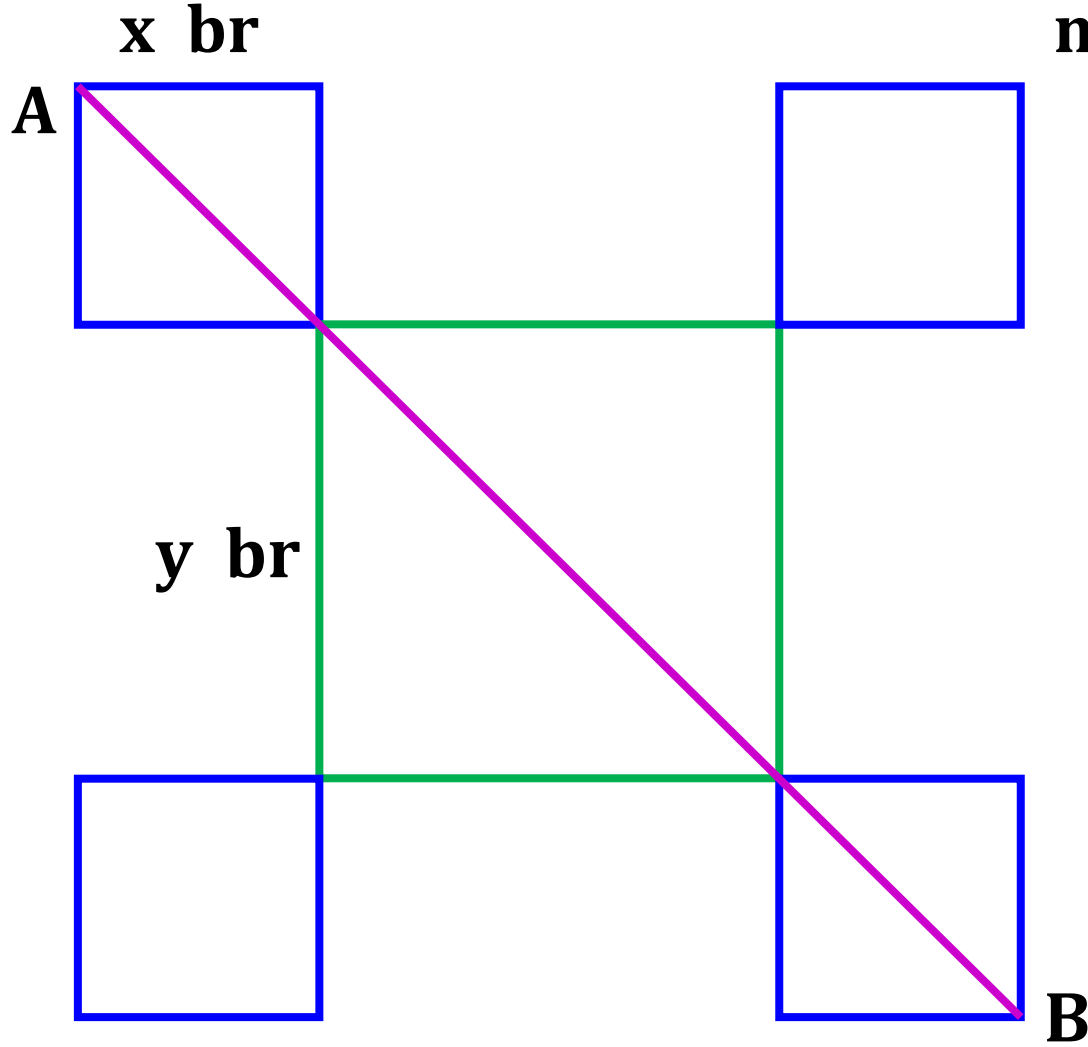
Soru : $2a + 3b = -11$ ve $a \cdot b = 5$ ise $4a^2 + 9b^2 = ?$

Soru : $x - \frac{3}{x} = 5$ ise $x^2 + \frac{9}{x^2} = ?$

Soru : Altta kare ve dikdörtgenlerden oluşan her bir bölgenin ve tüm bölgenin alanını bulunuz.



Soru : Şekilde beş tane kare verilmiştir. A ile B doğrusal olup aramese 15 br ve $x \cdot y = 10$ ise bu beş bölgenin alanını bulunuz.



(Dik üçgende Pisagor

Bağıntısından yararlanılır.)

Kural:3) İki terimin karelerinin farkı (iki kare farkı)

özdeşliği : $x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y)$ olarak alınır.

Soru: $x^2 - y^2 = 17$ olup x ve y pozitif tam sayılardır. Buna göre $x \cdot y = ?$ (İki kare farkından denklemlerin karşılığı bulunur. Taraf tarafa yok etme metodundan sayılar bulunur.)

Soru : $A = (5 - 1) . (5 + 1) . (5^2 + 1) . (5^4 + 1) .$
 $(5^8 + 1) . (5^{16} + 1)$ işleminin sonucunu üslü olarak içerecek şekilde bulunuz.

Soru : Kare şeklinde olan villa ve bahçe planı aşağıdaki şekilde verilmiştir. Villanın çevresi çim ile kaplanacaktır. Çimin m^2 fiyatı 250 ₺ ise çimin toplam ücreti kaç ₺ olur ?



Kural:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{a \pm 2\sqrt{m}} = \sqrt{p} \pm \sqrt{q}$$

olarak alınır.

$$a = p + q$$

$$m = p \cdot q$$

şartını sağlamalıdır.

*** Sonuç kısmında büyük kökten küçük kök çıkartılır.

Örneğin ; $\left(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} \right)^2 \stackrel{?}{=} \left(\sqrt{3} + \sqrt{2} \right)^2$ eşitliğini kontrol edelim.

$$5 + 2\sqrt{6} \stackrel{?}{=} \sqrt{3}^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2}^2$$

$$5 + 2\sqrt{6} \stackrel{?}{=} 3 + 2\sqrt{3 \cdot 2} + 2$$

$$5 + 2\sqrt{6} = 5 + 2\sqrt{6} \quad \text{eşitliği sağlanmış olur.}$$

Soru : $\sqrt{8 - 2\sqrt{12}} = ?$

Soru : $\sqrt{19 + 2\sqrt{60}} = ?$

Soru : $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = ?$

Soru :

$$\sqrt{7 + \sqrt{48}} = ?$$

(İç kökten 4 çarpanı dışarı alınır
ve kuralı sağlar hale getirilir.)

Soru : $\sqrt{6 + \sqrt{20}} = ?$

Soru : $\sqrt{4 - \sqrt{7}} = ?$

Soru : $\sqrt{6 + \sqrt{11}} = ?$

Soru : $\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + \sqrt{3}} = ?$

Soru : $\sqrt{9 - 6\sqrt{2}} = ?$ (İç kökün katsayısı 2 yapılır. Artan çarpan kök içine alınır ve kural sağlanır hale getirilir.)

Soru :

$$\sqrt{14 + 8\sqrt{3}} = ?$$

Soru :

$$4 \sqrt{11 + \sqrt{72}} - 3 = ?$$