

## FONKSİYONLAR – 1

### KAVRAM VE GÖSTERİM

#### KAVRAM OLARAK FONKSİYON

"Bir arabanın aldığı yol (x), zamana (t) bağlıdır."  
ifadesinin denklem şeklinde yazılışı  $x = v \cdot t$  olur.  
Bu denklemdeki t bağımsız değişken, x ise bağımlı değişkendir.  
Yani zaman ilerledikçe arabanın aldığı yol değişecektir.  
Buna göre, arabanın aldığı yol geçen süreye bağlı bir fonksiyondur denir.

#### Örnek...1 :

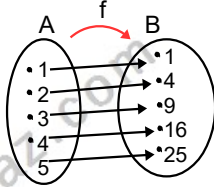
Bir kenarı x birim olan bir karenin alanı  $x^2$  birimkaredir.

Aşağıdaki tabloda x' in bazı değerleri için karenin alanı hesaplanmıştır.

Kenar (x)	1	2	3	4	5
Alan ( $x^2$ )	1	4	9	16	25

Buradaki ilişkiyi şema ile gösterirsek

Verilen bu şemaya göre, bağımlı ve bağımsız değişkenleri yazıp, bu kuralı fonksiyon biçiminde belirtiniz?



#### TANIM

A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere A'nın her bir elemanını B'nin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen ilişkiye (kurala) A dan B ye fonksiyon denir.

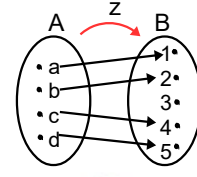
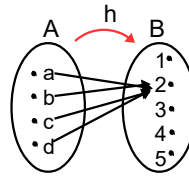
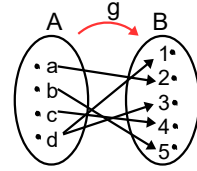
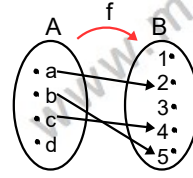
A dan B ye tanımlı bir f fonksiyonu  $f: A \rightarrow B$  : veya  $f: A \rightarrow B, y=f(x)$  biçiminde  $x \rightarrow y=f(x)$  gösterilir.

A dan B ye tanımlı f kuralının fonksiyon olması için

- A'daki her elemanın görüntüsü olmalı (A'da açıkta eleman kalmamalı)
- A'daki her elemanın yalnız bir tane görüntüsü olmalı koşulları gerçekleşmelidir.

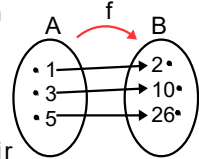
#### Örnek...2 :

Aşağıda A dan B ye şemaları verilen f, g, h, z eşlemelerinin fonksiyon olup olmadıklarını belirtiniz?



#### Örnek...3 :

A dan B ye f fonksiyonunun şeması yanda verilmiştir. f fonksiyonunu liste yöntemi, grafik yöntemi ile yazınız. Eşlemeyi bir kural ile yazmak istersek nasıl bir kural yazabiliriz?



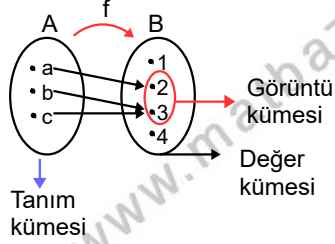
$f: A \rightarrow B$  fonksiyonunda  $y = f(x)$  gösteriminde x bağımsız değişkeninin f fonksiyonu ile y bağımlı değişkenine bağlandığı anlaşılır.

## FONKSİYONLAR – 1

### KAVRAM VE GÖSTERİM

#### TANIM, DEĞER VE GÖRÜNTÜ KÜMESİ

$f:A \rightarrow B$  fonksiyonunun şeması



olduğuna göre,

$A = \{a, b, c\}$  kümesine fonksiyonun tanım kümesi,

$B = \{1, 2, 3, 4\}$  kümesine fonksiyonun değer kümesi denir.

Bu fonksiyonu liste biçiminde

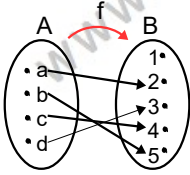
$f = \{(a, 2), (b, 3), (c, 3)\}$  olarak da yazabiliriz.

A'daki elemanların görüntülerinin kümesine görüntü kümesi denir ve  $f(A)$  ile gösterilir.

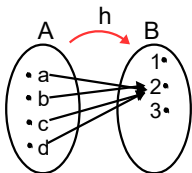
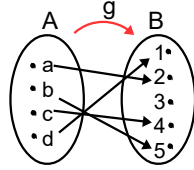
$f(A) = \{2, 3\}$  tür

#### Örnek...4 :

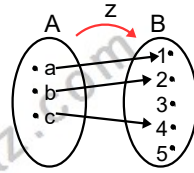
Aşağıda verilen fonksiyonların tanım (T), değer (D) ve görüntü kümelerini (G) yazınız?



T:  
G:  
D:



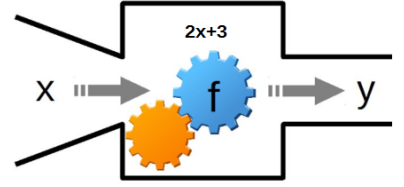
T:  
G:  
D:



#### FONKSİYON MAKİNESİ

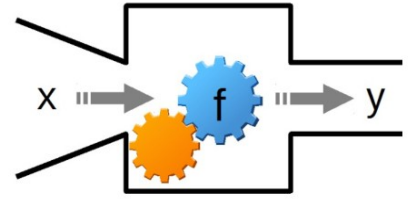
$f:A \rightarrow B$  fonksiyonunda  $y=f(x)$  gösteriminde x e girdi y ye ise çıktı denir. Bu işlemi bir fonksiyona benzetirsek

Girdi (x)	Çıktı (y)
1	5
2	7
3	
4	



#### Örnek...5 :

Girdi (x)	Çıktı (y)
1	6
2	11
3	16
4	21



Şekildeki fonksiyon makinesinin girdi ve çıktıları tabloda veriliyor. Buna göre  $f(x)$  in kuralı ne olabilir?

#### Örnek...6 :

Hangi eşlemeler fonksiyon belirtir?

1)  $f:\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$   
 $f(x) = x+3$

2)  $f:\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$   
 $f(x) = \frac{x}{2}$

3)  $f:\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$   
 $f(x) = \frac{2x-1}{3}$

4)  $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $f(x) = \sqrt{x+3}$

## FONKSİYONLAR – 1

### KAVRAM VE GÖSTERİM

#### UYARI

Bir fonksiyonun tanım kümesi verilmemişse bağımsız değişken seçilebilecek en geniş reel sayı kümesi düşünülür.

#### Örnek...7 :

$f(x) = 2x + 3$  ise  $f(4)$  kaçtır?

#### Örnek...8 :

$f(x) = x^2 + 4x - 7$  ise  $f(0) + f(1)$  kaçtır?

#### Örnek...9 :

$f(2x-3) = 4 - 3x$  olduğuna göre,  $f(1)$  kaçtır?

#### Örnek...10 :

$f(x+2) = 5x - 1$  olduğuna göre,  $f(6)$  kaçtır?

#### Örnek...11 :

$f(x^2 + 2x + 6) = 3x^2 + 6x + 20$  olduğuna göre,  $f(-3)$  kaçtır?

#### Örnek...12 :

$f(x) = 3x + 1$  ise  $f(2x)$  fonksiyonunun eşiti nedir?

#### Örnek...13 :

$\mathbb{R}'$  de tanımlı  $f$  fonksiyonu,  $f(x) = 3x + f(x-1)$  eşitliği ile veriliyor.  $f(2) = 2$  olduğuna göre,  $f(5)$  değeri kaçtır?

#### Örnek...14 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x+1) = x \cdot f(x)$  eşitliği ile veriliyor.  $f(2) = 4$  olduğuna göre,  $f(6)$  değeri kaçtır?

## FONKSİYONLAR – 1

### KAVRAM VE GÖSTERİM

#### Örnek...15 :

$f(x) = x - 1$  olmak üzere,  $f(x+3)$  ün  $f(x)$  türünden eşitini bulunuz.

#### Örnek...16 :

$f(x) = 3x + 2$  olmak üzere,  $f(2x-3)$  ün  $f(x)$  türünden eşitini bulunuz.

#### Örnek...17 :

$f: A \rightarrow [0,2,5]$  olduğuna göre A kümesini bulunuz  
 $f(x)=x+3$

#### Örnek...18 :

Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi daima  $f(a+b)=f(a).f(b)$  eşitliğini sağlar?

I.  $f(x)=3x$       II.  $g(x)=x^3$       III.  $h(x)=3^x$

#### BİRİM (ÖZDEŞ) FONKSİYON

Her  $x \in A$  için  $f: A \rightarrow A$  fonksiyonu  $f(x) = x$  ile verilmişse  $f$  fonksiyonuna birim fonksiyon denir ve  $I(x)=x$  ile gösterilir.  
Yani her elemanın görüntüsü birim fonksiyon altında yine kendisidir.

#### Örnek...19 :

$f: A \rightarrow A$ ,  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  ise  $f(x) = x$  fonksiyonu birim fonksiyonunun şemasını çizin.

#### Örnek...20 :

$f(x) = (a + 1)x^2 + (b - 3)x - a + b - c$  biçiminde tanımlanan  $f(x)$  birim fonksiyonu için,  $f(a.b.c)$  değeri kaçtır?

#### Örnek...21 :

$f(x^3) = (a+2)x^3 + (b - 1)x^2 + c + 2$  fonksiyonu veriliyor.  
 $f$  fonksiyonu birim fonksiyon olduğuna göre,  $f(a + b - c)$  kaçtır?

#### SABİT FONKSİYON :

$f: A \rightarrow B$  fonksiyonu için  $f(A)$  görüntü kümesi tek elemanlı ise  $f$  fonksiyonuna sabit fonksiyon denir.

Yani Her  $x \in A$  ve  $c \in B$  için  $f(x) = c$  ise  $f$  sabit fonksiyondur.  
 $s(A)=a$ ,  $s(B)=b$  ise  $A$  dan  $B$  ye en çok  $b$  tane sabit fonksiyon tanımlanır.

$f(x) = ax^2 + bx + c$  sabit fonksiyon ise ;  
 $a=0$  ,  $b=0$  (sadece  $x$  içermeyen terimler kalır)

$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  sabit fonksiyon ise ;  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$  ,  
(eşit dereceli terimlerin katsayıları orantılıdır)

## FONKSİYONLAR – 1

### KAVRAM VE GÖSTERİM

#### Örnek...22 :

$A = \{-1, 0, 2, 3\}$  ve  $B = \{3\}$  olmak üzere  $f : A \rightarrow B$  fonksiyonu nasıl bir fonksiyondur? Şemasını çiziniz.

#### Örnek...23 :

$f(x) = (a+2)x^2 + (b-3)x + 2a - b$  fonksiyonu sabit fonksiyon olduğuna göre,  $f(10)$  kaçtır?

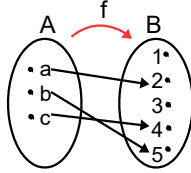
#### Örnek...24 :

$f(x) = \frac{(m-5n)x+4}{nx-2}$  fonksiyonu sabit fonksiyon olduğuna göre,  $\frac{m}{n}$  değeri kaçtır?

### FONKSİYON TÜRLERİ

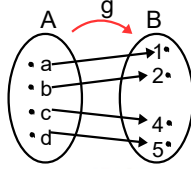
#### 1. İçine Fonksiyon

$f : A \rightarrow B$  fonksiyonu için  $f(A) \neq B$  ise  $f$  fonksiyonuna içine fonksiyon denir. Yani değer kümesinde açıkta eleman kalıyorsa fonksiyon içinedir.



#### 2. Örten Fonksiyon

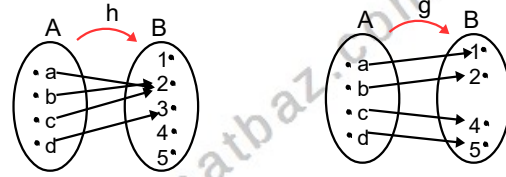
$f : A \rightarrow B$  fonksiyonu için  $f(A) = B$  ise  $f$  fonksiyonuna örten fonksiyon denir. Yani değer kümesinde açıkta eleman kalmıyorsa fonksiyon örtendir.



#### 3. Bire-bir Fonksiyon

$f : A \rightarrow B$  fonksiyonu verilsin. Her  $x_1, x_2 \in A$  ve  $x_1 \neq x_2$  için  $f(x_1) \neq f(x_2)$  oluyorsa  $f$  fonksiyonuna bire-bir (1-1) fonksiyon denir.  $s(A)=a$ ,  $s(B)=b$  ise  $A$  dan  $B$  ye en çok  $P(b,a)$  birebir fonksiyon tanımlanır.

#### Örnek...25 :



$h$  fonksiyonu tanım kümesinin farklı en az iki elemanını değer kümesinden aynı elemanla eşleştirdiğinden bire-bir değildir.  $g$  fonksiyonu ise farklı elemanları farklı görüntülerle eşleştirdiğinden bire-birdir.

#### Örnek...26 :

Reel sayılarda tanımlı ( $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ )  $y=f(x)=x^4$  fonksiyonu 1-1 midir? Değil ise bu fonksiyonun 1-1 hale getirilmesi için mümkün bir yol var mıdır?

### DOĞRUSAL FONKSİYON

$f(x) = mx + n$  biçimindeki fonksiyona doğrusal fonksiyon denir.

Doğrusal fonksiyonların grafikleri düzlemde bir doğru belirtir.

#### Örnek...27 :

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $f(x)$  fonksiyonu doğrusal fonksiyon belirtmektedir.  $f(0)=2$  ve  $f(-1) = 5$  olduğuna göre,  $f(4)$  kaçtır?

#### Örnek...28 :

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $f(x) = (a+2)x^3 + (b-3)x^2 + a.bx - 2.a + 2.b - d$  eşitliği doğrusal fonksiyon belirtmektedir.  $f(-1) = 5$  olduğuna göre,  $f(d)$  kaçtır?

## FONKSİYONLAR – 1

### KAVRAM VE GÖSTERİM

$y=f(x)=mx+n$  doğrusal fonksiyonunda  $m$  sayısı doğrunun eğimidir.

#### Örnek...29 :

En az iki elemanlı bir kümede tanımlı sabit, birim ve doğrusal fonksiyonların bire birliğini araştırınız?

### TEK VE ÇİFT FONKSİYONLAR

$f : A \rightarrow B$  olmak üzere ,tanım kümesine ait her  $x$  elemanı için

$f(-x) = f(x)$  oluyorsa  $f$  fonksiyonuna çift fonksiyon denir.

$f(-x) = -f(x)$  oluyorsa  $f$  fonksiyonuna tek fonksiyon denir.

Tek fonksiyonların grafikleri orjine göre, çift fonksiyonların grafikleri  $y$  eksenine göre simetriktr

#### Örnek...30 :

Aşağıda verilen ve gerçık sayılar kümesinde tanımlı fonksiyonların tek fonksiyon ya da çift fonksiyon olup olmadıklarını belirleyiniz.

$$f(x)=x^3, \quad g(x)=|x|, \quad h(x)=x^2+x$$

#### Örnek...31 :

$f(x)$  çift bir fonksiyon ve  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $5.f(x)+2.f(-x)=3x^2+1$   
biçiminde tanımlı ise  $f(0)$  kaçtır?

#### Örnek...32 :

$f: [a,3] \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x)=(m-2)x^3+(n-3)x^2+(a+n-5)x+2$   
fonksiyonu çift fonksiyon ise  $f(a)=?$

#### Örnek...33 :

$f(x)$  tek bir fonksiyon ve  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $4.f(x)+2.f(-x)=3x^3+2x+k-2$   
ise  $f(k)$  kaçtır?

### PARÇALI TANIMLI FONKSİYONLAR

Tanım kümesinin ayrık alt aralıklarında farklı kurallarla ifade edilen fonksiyonlara parçalı tanımlı fonksiyon denir.

$$f(x)=\begin{cases} g(x), & x < a \\ h(x), & x \geq a \end{cases}$$

#### Örnek...34 :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4x+2, & x < 0 \\ -x-5, & x \geq 0 \end{cases} \text{ ise } f(-3)+f(2)=?$$

#### Örnek...35 :

Reel sayılarda  $f(x)=\begin{cases} 2x & x > 2 \\ x+2 & -3 < x \leq 2 \\ -3 & x \leq -3 \end{cases}$  biçiminde tanımlanan fonksiyon için  $f(2)-f(3)$  kaçtır?

## FONKSİYONLAR – 1

### KAVRAM VE GÖSTERİM

Mutlak değer fonksiyonu da parçalı tanımlı bir fonksiyondur

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

#### Örnek...36 :

$g(x) = |x - 3|$  fonksiyonunu parçalı biçimde yazınız?

#### Örnek...37 :

$g(x) = |2x + 10|$  fonksiyonunu parçalı biçimde yazınız

### EŞİT FONKSİYONLAR

$f : A \rightarrow B$ ,  $g : A \rightarrow B$  fonksiyonlarında her  $x \in A$  için  $f(x) = g(x)$  oluyorsa  $f$  ve  $g$  fonksiyonları eşittir denir ve  $f = g$  yazılır.

#### Örnek...38 :

$A = \{0, 1\}$ ,  $B = \{1, 2\}$  olmak üzere  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : A \rightarrow B$  fonksiyonları için  $f(x) = x + 1$ ,  $g(x) = x^3 + 1$  biçiminde tanımlanıyor,  $f$  ve  $g$  eşit fonksiyonlar mıdır?

### DEĞERLENDİRME

1)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x - 3$  fonksiyonu veriliyor. Buna göre,  $f(3)$  kaçtır?

2)  $f(2x+3) = 5x-7$  olduğuna göre,  $f(-5)$  kaçtır?

3)  $f(x) = 4x + 3$  ise  $f(3x+2)$  fonksiyonunun eşiti nedir?

4)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x+3) = x + f(x+2)$  eşitliği ile veriliyor.  $f(3) = 5$  olduğuna göre,  $f(17)$  değeri kaçtır?



## FONKSİYONLAR – 1

### KAVRAM VE GÖSTERİM

- 5)  $f(x) = 2^{x-1}$  olmak üzere,  $f(x+3)$  ün  $f(x)$  türünden eşitini bulunuz

- 6)  $f = \{(2x-3, 15), (3y, 5), (4, 4)\}$  fonksiyonu veriliyor.  $f$  fonksiyonu birim fonksiyon olduğuna göre  $x.y$  kaçtır?

- 7)  $f(x) = (a+1)x^2 + (b-3)x - a + b$  biçiminde tanımlanan  $f(x)$  sabit fonksiyonu için,  $f(a.b)$  değeri kaçtır?

- 8)  $f(x) = \frac{(m+1)x^2 - (n+2)x + 4}{3x+5}$  fonksiyonu sabit fonksiyon olduğuna göre,  $m.n$  değeri kaçtır?

- 9)  $f: [p, 5] \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) = px^3 + (r+2)x^2 + 2x + s - r$  fonksiyonu tek fonksiyon ise  $f(1)$  kaçtır?

- 10)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) = (m-2)x^k + (n-3)x^3 + (13-k+n)x + 2$  fonksiyonu çift fonksiyon ise  $k+n$  kaçtır?

- 11)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{7}x^{14} - \sqrt{5}x^{10} - cx^4 + 8x + 4$  ve  $f(-3) = 3$  ise  $f(3)$  kaçtır?

- 12) Taksiyle yolculuk yapacak bir kişinin  $x$  kilometre yol gittiğinde ödediği ücret ₺ cinsinden  $f(x) = \begin{cases} 2x+3,8 & , \quad 0 < x < 5 \\ x+8,8 & , \quad x \geq 5 \end{cases}$  fonksiyonunu ile verilmektedir. Bu taksiyle 8 km yol giden Aslı, 3 km yol giden Beril'den kaç ₺ fazla ücret öder?

- 13)  $f(x) = \begin{cases} x+3, & x < 0 \\ 2x-8, & x \geq 0 \end{cases}$  fonksiyonunu için  $f(x) = 0$  denkleminin köklerini bulunuz



## FONKSİYONLAR -2

### FONKSİYONLARDA İŞLEMLER

#### FONKSİYONLARDA İŞLEMLER :

$f: A \rightarrow B$  ve  $g: C \rightarrow D$  iki fonksiyon olmak üzere,  $A \cap C = T$  ise

1.  $\forall x \in T \quad f(x) \pm g(x) = (f \pm g)(x)$
2.  $\forall x \in T$  ve  $k \in \mathbb{R}$  için  $k.f(x) = (k.f)(x)$
3.  $\forall x \in T \quad f(x).g(x) = (f.g)(x)$
4.  $\forall x \in T \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x) \quad (g(x) \neq 0)$

olarak tanımlanmıştır.

#### Örnek...1 :

$f(x) = 5x + 2$  ve  $g(x) = 2 - 3x^2$  olmak üzere,  $(3f - 2g)(3)$  ifadesinin değeri kaçtır?

#### Örnek...2 :

$f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$   
 $g: \{-2, 0, 3\} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = x^3 + 1$  olarak veriliyor.  
 $f+g$  fonksiyonunu liste biçiminde yazınız.

#### Örnek...3 :

$(f-g)(x) = x$ ,  $(f+g)(x) = 2x^2 - 3x$  ise  $(f.g)(1)$  değeri kaçtır?

#### Örnek...4 :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases} \quad \text{ve} \quad g(x) = \begin{cases} 3x-2 & x < 0 \\ x-1 & x \geq 0 \end{cases}$$

fonksiyonları veriliyor. Buna göre,

- a)  $(f.g)(-1) = ?$       b)  $\left(\frac{f}{g}\right)(6) = ?$

#### Örnek...5 :

Reel sayılarda  $f$  fonksiyonu tek  $g$  fonksiyonu çift fonksiyonlarsa aşağıdaki fonksiyonları teklik çiftlik bakımından inceleyiniz?

- a)  $f+g$       b)  $f.g$

## FONKSİYONLAR -2

### FONKSİYONLARDA İŞLEMLER

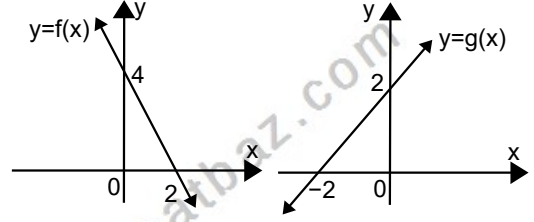
#### DEĞERLENDİRME

- 1)  $f: \{-2, -1, 0, 1, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) = 2x + 3$  ve  $g: \{-3, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$   $g(x) = x^2 - 1$  olarak veriliyor. Buna göre a)  $g+5$  fonksiyonunu b)  $2f+3g$  fonksiyonunu liste biçiminde yazınız.

- 2)  $f(x) = mx + 2$  ve  $g(x) = 2 - mx^2$  olmak üzere,  $(f-4g)(1) = 6$  ise  $m$  kaçtır?

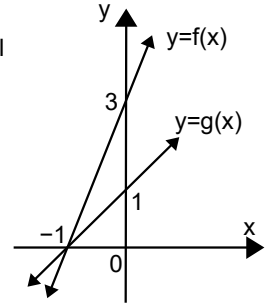
- 3)  $f(x) = m^2x^3 + 4x$  ve  $g(x) = 4 + mx$  olmak üzere,  $\left(\frac{f}{2g}\right)(1) = 2$  ise  $m$  kaç olabilir?

4)



Grafikleri verilen doğrusal  $f$  ve  $g$  fonksiyonları için  $(kf - 3g)(1) = 7$  ise  $k$  kaçtır?

- 5) Grafikleri verilen doğrusal  $f$  ve  $g$  fonksiyonları için  $(f+g)(x+3)$  fonksiyonunun  $g(x)$  türünden eşiti nedir?



## FONKSİYONLAR – 3

### GRAFİK ÇİZİM VE YORUMU

#### DOĞRUSAL FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere  $f(x) = mx + n$  fonksiyonunun grafiği dik koordinat sisteminde  $y = mx + n$  doğrusunun grafiğini belirtir. Bir doğrunun grafiğini çizmek için bu doğrunun geçtiği en az 2 noktaya ihtiyaç vardır.  $y = mx + n$  denklemini sağlayan en az 2 tane sıralı ikili seçilip bu sıralı ikililer dik koordinat sisteminde işaretlenir ve işaretlenen noktalar bir doğru oluşturacak şekilde birleştirilip doğru çizilir.

#### Örnek...1 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere  $f(x) = x + 4$  fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

#### Örnek...2 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere  $f(x) = 8 - \frac{x}{2}$  fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

#### Örnek...3 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere  $f(x) = -6$  fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

#### Örnek...4 :

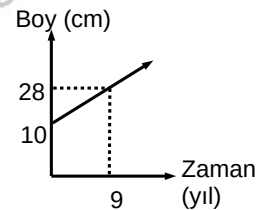
$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$  fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

#### Örnek...5 :

$f(x) = \begin{cases} -2, & x < 0 \\ \frac{x}{2} & 0 \leq x < 4 \\ x+2 & x \geq 4 \end{cases}$  fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

#### Örnek...6 :

Grafik bir bitkinin boyunun zamana göre değişimini vermektedir buna göre bitkinin boyu kaç yıl sonra 40 cm olur?

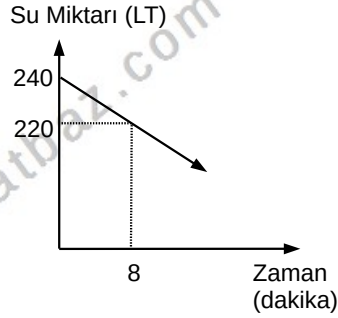


## FONKSİYONLAR – 3

### GRAFİK ÇİZİM VE YORUMU

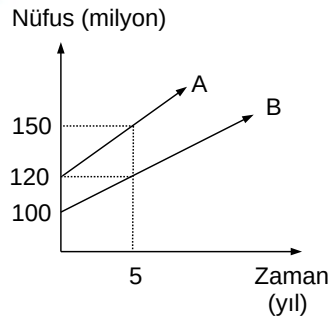
#### Örnek...7 :

Şekil hacmi 240 litre olan bir havuzun tabanındaki bir musluğun açılmasıyla havuzda kalan su miktarının zamana göre değişimi verilmiştir. Buna göre havuz kaç saatte boşalır?

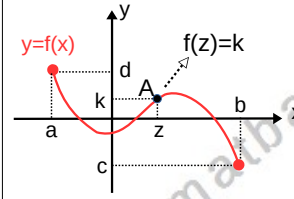


#### Örnek...8 :

Şekilde A ve B ülkelerinde nüfusun zaman bağlı değişimi verilmiştir buna göre bu iki ülke nüfusu arasındaki fark nüfus sayımı yapılmaya başlandıktan kaç yıl sonra 180 milyon olur?



#### FONKSİYON GRAFİĞİ OKUMA



(z, k) ikilisinin analitik düzlemdeki görüntüsü A noktasıdır.

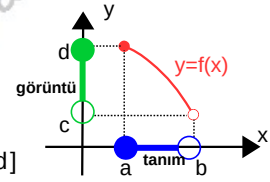
► z sayısına apsis, k sayısına ise ordinat denir.

► A(z, k) noktası  $y = f(x)$  fonksiyonunun grafiği üzerinde ise  $f(z) = k$  yazılır.

► A(z, k) noktası  $y = f(x)$  fonksiyonunun grafiği üzerinde ise  $f^{-1}(k) = z$  yazılır. Burada  $f^{-1}$  ifadesi f kuralının ters bağıntısıdır (10. sınıfta detaylı olarak işlenecektir) [  $f(x)=y$  ,  $f^{-1}(y) = x$  ]

► Yukarıda verilen grafikte x değerleri [a,b] aralığından seçildiği için tanım kümesi [a,b] , görüntü kümesi ise [c,d] kümesidir.

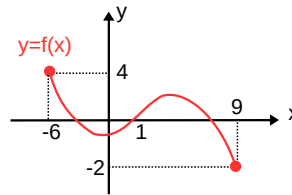
Tanım Kümesi : [ a,b ]



Görüntü Kümesi : (c,d]

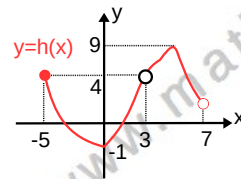
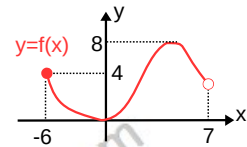
#### Örnek...9 :

Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini yazınız



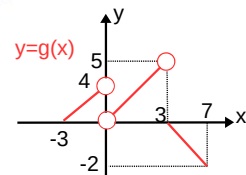
T.K.

G.K.



T.K.

G.K.

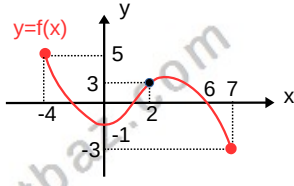


## FONKSİYONLAR – 3

### GRAFİK ÇİZİM VE YORUMU

#### Örnek...10 :

Yandaki grafik  $y=f(x)$  fonksiyonuna aittir. Buna göre istenilenleri bulunuz?

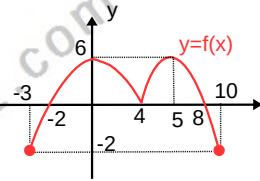


- a)  $f(2)=$       b)  $f(6)=$       c)  $f(7)=$
- d)  $f(0)=$
- e) fonksiyonun alabileceği en büyük değer =

$f(x) = 0$  denkleminin çözüm kümesi  $y = f(x)$  denklemiyle verilen fonksiyonunun (varsa)  $x$  eksenini kestiği noktaların apsisi,  $f(x) = 0$  denkleminin gerçek (reel) sayılar kümesindeki çözüm kümesidir.

#### Örnek...11 :

Yandaki grafik  $y=f(x)$  fonksiyonuna aittir. Buna göre istenilenleri bulunuz?

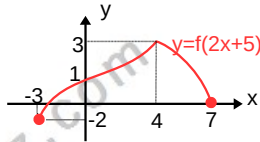


- a)  $f(k)=0$  ise  $k$  kaç olabilir?
- b)  $\frac{f(0)+f(4) \cdot f(9)}{f(-3) \cdot f(5)}$

c) tanım kümesindeki kaç  $a$  tamsayısı için  $f(a) < 0$  dır?

#### Örnek...12 :

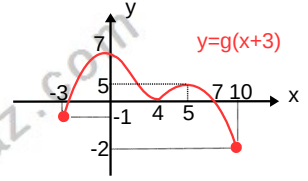
Yandaki grafik  $y=f(2x+5)$  fonksiyonuna aittir. Buna göre istenilenleri bulunuz?



- a)  $f(13)=?$
- a)  $\frac{f(5)+f(-1)}{f(19)-1}=?$

#### Örnek...13 :

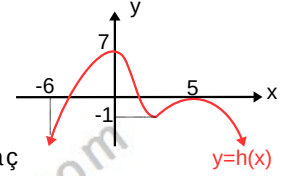
Yandaki grafik  $y=g(x+3)$  fonksiyonuna aittir. Buna göre istenilenleri bulunuz?



- a)  $g(-3)+g(0) = ?$
- b)  $\frac{g(13)+g(3) \cdot g(0)}{g(7)-2g(8)}=?$

#### Örnek...14 :

Yandaki grafik  $y=h(x)$  fonksiyonuna aittir.



- a)  $h(x)=0$  denkleminin kaç kökü vardır?
- b)  $h(x)=-1$  denkleminin kaç kökü vardır?
- c)  $h(x)=8$  denkleminin kaç kökü vardır?

#### Örnek...15 :

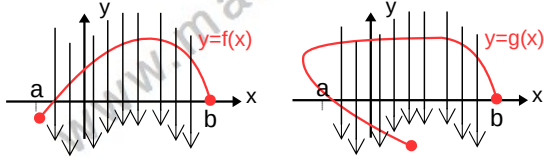
$f(x) = 4x - 28$  fonksiyonunun  $x$  eksenini kestiği noktanın apsisi kaçtır?

#### Örnek...16 :

$f(x)=x^2-ax+b$  fonksiyonunun  $x$  eksenini kestiği noktaların apsisi 1 ve  $-2$  olduğuna göre,  $y$  eksenini hangi noktada keser?

### DÜŞEY DOĞRU TESTİ

Bir grafikte y eksenine çizilen paralel doğrular grafiği birden fazla noktada kesiyorsa o ilişki (eşleme) fonksiyon değildir.



$y=f(x)$  ,  $[a,b]$  tanım aralığı için fonksiyondur. (düşey çizgiler grafiği daima tek noktada kesiyor)

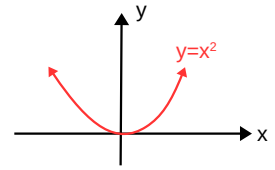
$y=g(x)$  ,  $[a,b]$  tanım aralığı için fonksiyon değildir. (düşey çizgiler grafiği bazen birden fazla noktada kesiyor)

### Örtenlik-içinelik İçin Yatay Doğru Testi

Bir fonksiyonun örten mi içine mi olduğunu anlamak için değer kümesinden seçilecek her elemanına karşılık tanım kümesinden bir elemanın eşleşip eşleşmediğini bilmek gerekir. Grafikten bunu anlamanın yolu görüntüsü araştırılacak eleman için  $x$  eksenine paralel bir doğru çizilir ve bu doğrunun grafiği kesip kesmemesine göre karar verilir

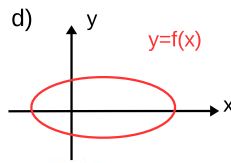
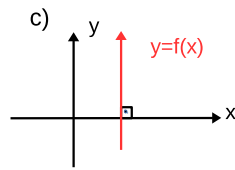
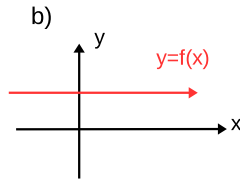
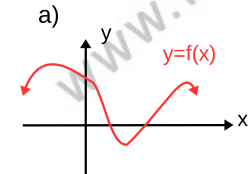
#### Örnek...18 :

Şekildeki fonksiyonun değer kümesi Reel sayılar kümesi ise fonksiyon içinedir. Eğer değer kümesi  $[0, \infty)$  alınırsa fonksiyon örten dir



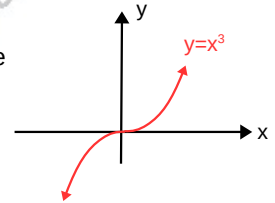
#### Örnek...17 :

Hangi grafik bir fonksiyona ait olabilir?



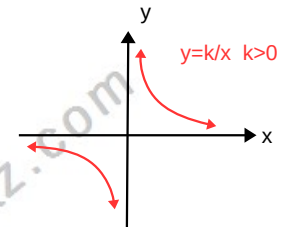
#### Örnek...19 :

Şekildeki fonksiyonun Reel sayılar kümesinde fonksiyon mudur?



#### Örnek...20 :

Şekildeki fonksiyonun değer kümesi Reel sayılar kümesi ise bu fonksiyon örten midir?



## FONKSİYONLAR – 3

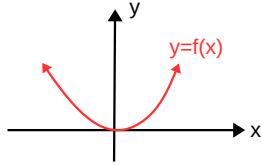
### GRAFİK ÇİZİM VE YORUMU

#### Bire-birlik İçin Yatay Doğru Testi

Bir fonksiyonun grafiği ve yatay olarak çizilen farklı doğrular en çok bir defa kesişiyorsa fonksiyon bire bir dir . Yatay doğrular birden çok defa fonksiyon grafiğini kesiyorsa fonksiyon 1-1 değildir.

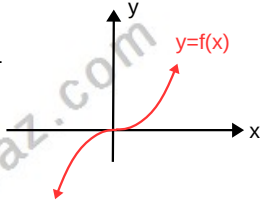
#### Örnek...21 :

Reel sayılarda tanımlı  $y=f(x)$  fonksiyonu 1-1 midir?

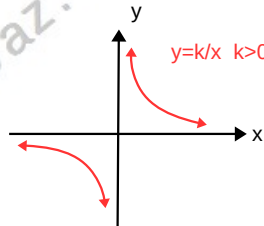
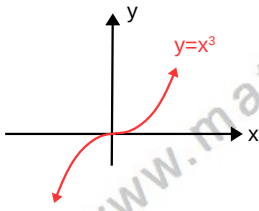
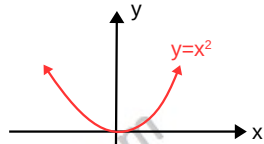
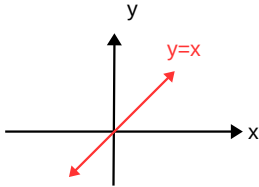


#### Örnek...22 :

Reel sayılarda tanımlı  $y=f(x)$  fonksiyonu 1-1 midir?



$f(x)=x^n$  fonksiyonlarının grafikleri



### DEĞERLENDİRME

1) Yandaki grafik

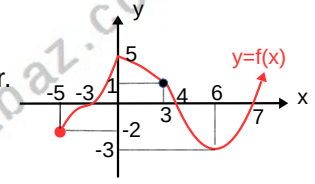
$$y=f(x)$$

fonksiyonuna aittir.

Buna göre

istenilenleri

bulunuz?



a)  $f(x+1)=0$  denklemini sağlayan  $x$  değerlerinin toplamı kaçtır?

$$b) \frac{f(3)+f(-5) \cdot f(0)}{f(6)+f(7)}$$

c) Aşağıdaki tanım aralıkları için  $f$  bire-bir midir?

i)  $[-5,0]$

iii)  $[0,7]$

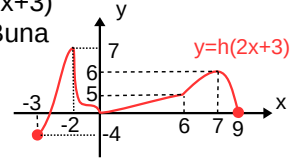
d)  $f: [-5, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu örten midir?

2) Yandaki grafik  $y=h(2x+3)$

fonksiyonuna aittir. Buna

göre istenilenleri

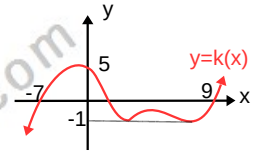
bulunuz?



$$\frac{h(15)+h(3)}{h(17)-h(21)} = ?$$

3) Yandaki grafik  $y=k(x)$

fonksiyonuna aittir.



a)  $k(x)=0$  denkleminin kaç kökü vardır? ( $f(x)$  in sıfırlarının sayısı kaçtır?)

b)  $k(x)=-1$  denkleminin kaç kökü vardır?

c)  $k(x)=4$  denkleminin kaç kökü vardır?



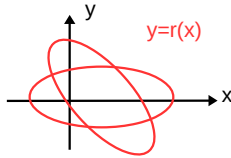
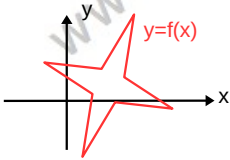
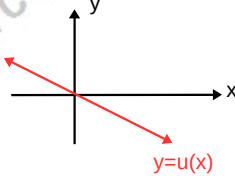
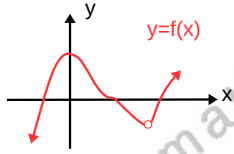
## FONKSİYONLAR – 3

### GRAFİK ÇİZİM VE YORUMU

- 4)  $f(x) = x^2 - 9$  fonksiyonunun x eksenini kestiği noktaların birbirine uzaklığı kaç birimdir?

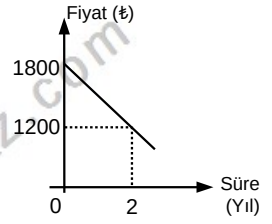
- 5)  $f(x) = x^2 + mx + n$  fonksiyonunun x eksenini kestiği noktaların apsisi  $-1$  ve  $2$  olduğuna göre, y eksenini hangi noktada keser?

- 6) Hangisi reel sayılarda tanımlı bir fonksiyona ait olabilir?



- 7)  $f(x) = \begin{cases} mx+n, & x < 1 \\ -x^2+2n-3, & x \geq 1 \end{cases}$  ve  $f(0) = f(2)$  ise  $f(3)$  kaçtır?

- 8) Bir akıllı telefonun üretildiği tarihten itibaren fiyatında ki değişim grafiği verilmiştir. Akıllı telefonun fiyatı kaçinci yılda ilk fiyatının yarısı kadar olur ?

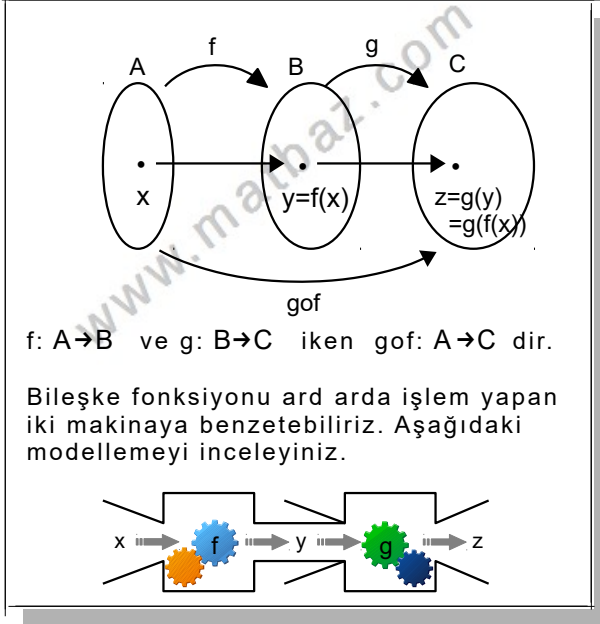


- 9)  $(x) = |x - 3| - 2$  fonksiyonunu parçalı biçimde yazarak grafiğini çiziniz ?

## FONKSİYON – 4

### BİLEŞKE İŞLEMİ

#### BİLEŞKE FONKSİYON :



#### BİLEŞKE VE TERS FONKSİYON ÖZELLİKLERİ

1) Genellikle  $gof \neq fog$  dir.

Ancak bazı özel durumlarda bu eşitlik sağlanır.

a )  $g(x)=I(x)$  ise  $foI=Iof$

b )  $f(x)=t.x$  ve  $g(x)=k.x$  ise  $fog=gof$  tir.

Diğer durumlarıda siz düşünün.

2)  $go(foh) = (gof)oh$  (Birleşme özelliği vardır.)

Diğer bileşke özellikleri ters fonksiyon içinde verilecektir.

#### Örnek...1 :

Gerçek sayılar kümesinde tanımlı  $f(x) = 7x+2$  ve  $g(x)=2x+3$  fonksiyonları için  $(fog)(x)$  ve  $gof(x)$  fonksiyonlarının kuralını bulunuz?

#### Örnek...2 :

$f(x)=3x-5$  olduğuna göre,  $(fof)(x)$  kuralını bulunuz?

#### Örnek...3 :

$f(x)=kx+2$  ve  $g(x)=x+7$  olarak veriliyor.  $(fog)(x)=3x+9m+5$  olduğuna göre,  $f(k+m)$  ifadesinin değeri kaçtır?

#### Örnek...4 :

$f(x)=2x+5$  ,  $g(x)=3x-1$  ve  $h(x)=2x+3$  olduğuna göre,  $(fogoh)(x)$  fonksiyonunun kuralını bulunuz?

#### Örnek...5 :

$f(x+2)=7-x$  ve  $g(x-2)=5x-4$  olduğuna göre,  $(fog)(1)$  kaçtır?

## FONKSİYON – 4

### BİLEŞKE İŞLEMİ

#### Örnek...6 :

$f(x)=x^2+k$  olarak veriliyor.  
 $(f \circ f)(0)=12$   
olduğuna göre,  $k$  değerlerinin ortalaması kaçtır?

#### Örnek...7 :

$f(x)=x+1$  ve  $(g \circ f)(x)=3x+3$   
olduğuna göre,  $g(x)$  kuralını bulunuz?

#### Örnek...8 :

$g(x)=x-1$  ve  $(g \circ f)(x)=x^2+x$   
olduğuna göre,  $f(x)=1$  denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

#### Örnek...9 :

$f$  bire bir fonksiyon olmak üzere,  
 $(f \circ g)(9+5x)=f(x^2+x+6)$   
olduğuna göre,  $g(-1)$  kaçtır?

#### Örnek...10 :

$f(x)=|x+2|$  olmak üzere  $\underbrace{f \circ f \dots \circ f}_{11 \text{ defa}}(-2)$  işleminin sonucu kaçtır?

#### Örnek...11 :

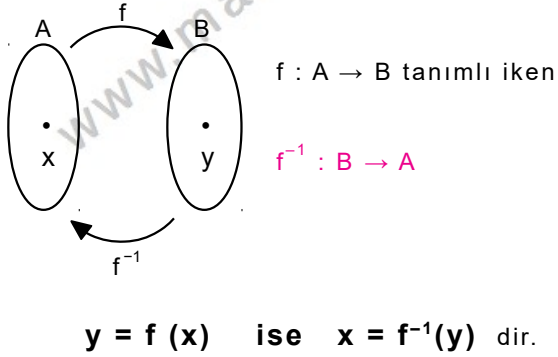
Reel sayılarda  $f$  fonksiyonu tek,  $g$  fonksiyonu çift fonksiyonlarsa aşağıdaki fonksiyonları teklik çiftlik bakımından inceleyiniz?

- a)  $(f \circ g)(x)$       b)  $f(x \cdot g(x))$       c)  $f \circ f$

**TERS FONKSİYON :**

Bir fonksiyonun tersinin de fonksiyon olabilmesi için bu fonksiyonun bire bir (1-1) ve örten olması gerekir.

Bir fonksiyon ile tersi 1. açıortay doğrusuna göre simetrik.



**TERSİNİ BULMA KURALI ( GENELLEME )**

Bir fonksiyonun tersini; **x yerine y, y yerine x yazıp bu yeni y' yi çekerek elde ettiğimiz x' li ifade ile buluruz.**

**Örnek...1 :**

$f(x) = 3x + 7$  fonksiyonunun tersini bulunuz?

**Örnek...2 :**

$f: \mathbb{R} - \left\{ \frac{5}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{2} \right\}, f(x) = \frac{3x+2}{2x-5}$  fonksiyonunun tersini bulunuz?

**Örnek...3 :**

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$  fonksiyonunun tersini bulunuz?

**Örnek...4 :**

$f: (-6, \infty) \rightarrow (0, \infty) f(x) = x^2 + 12x + 36$  fonksiyonunun tersini bulunuz?

**Örnek...5 :**

$f: (-\infty, 4) \rightarrow (-10, \infty) f(x) = x^2 - 8x + 6$  fonksiyonunun tersini bulunuz?

**Örnek...6 :**

Negatif reel sayılardan pozitif reel sayılara tanımlı  $f(x) = x^2$  fonksiyonunun tersini bulunuz?

**PRATİK KURALLAR :**

- 1)  $f(x) = ax + b$  ise  $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$  dır.
- 2)  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  ise  $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$  dır.

**Örnek...7 :**

Aşağıdaki fonksiyonların tersini uygun şartlarda bulunuz ?

$$f(x) = 2x + 5 \quad f(x) = 5x - 137$$

$$f(x) = 9x \quad f(x) = 7$$

$$f(x) = \frac{3x+7}{2x+5} \quad f(x) = \frac{x+2}{3x-5}$$

$$f(x) = \frac{7-4x}{2x-8} \quad f(x) = \frac{7x+2}{3+2x}$$

$$f(x) = \frac{4x-1}{5x} \quad f(x) = \frac{5}{2x-3}$$

**Örnek...8 :**

$$f: \mathbb{R} - \{6\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$$

$$f(x) = \frac{ax + \sqrt{3}}{3x - b}$$

ifadesi bire bir (1-1) ve örten bir fonksiyon ise  $a+b$  toplamı kaçtır?

**Örnek...9 :**

Uygun koşullarda  $x = \frac{3f(x)+5}{f(x)+2}$  fonksiyonu veriliyor.

Buna göre,  $f(0) + f^{-1}(0)$  toplamı kaçtır?

**Örnek...10 :**

Uygun koşullarda  $f(x) = \frac{f(x)-x}{x+4}$  fonksiyonu veriliyor.

Buna göre,  $f(x)$  fonksiyonunu, tanım ve görüntü kümesini bulunuz

**TERS FONKSİYON ÖZELLİKLERİ**

- 1)  $(f^{-1})^{-1} = f$
- 2)  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$
- 3)  $f \circ g = I$  ise  $f = g^{-1}$  veya  $g = f^{-1}$
- 4)  $(f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n)^{-1} = f_n^{-1} \circ \dots \circ f_2^{-1} \circ f_1^{-1}$   
(Ters sırada açılır)

**Örnek...11 :**

$$(f \circ g^{-1})(x) = \frac{9x-5}{71+\sqrt{3}x}$$

olduğuna göre,  $(g \circ f^{-1})(x)$  fonksiyonunun kuralını bulunuz?

**Örnek...12 :**

$$(f \circ g^{-1})(x) = 2x+5 \quad \text{ve} \quad (g \circ f^{-1})(x) = mx+n$$

olduğuna göre,  $m+n$  kaçtır?

**Örnek...13 :**

$$\begin{aligned} f_1^{-1}(5) &= 1 \\ f_2(4) &= 2 \\ f_3(2) &= 1 \end{aligned}$$

olduğuna göre,  $(f_1 \circ f_3 \circ f_2)^{-1}(5)$  kaçtır?

**Örnek...14 :**

$$f(x) = \frac{3x+2}{4x-1} \quad \text{ve} \quad (f \circ g)(x) = x$$

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre,  $(g^{-1})(0)$  kaçtır?

**Örnek...15 :**

$h$  ve  $g$  bire bir  $(1-1)$  ve örten fonksiyonlar olmak üzere,

$$(h^{-1} \circ g)^{-1}(x) = g^{-1}(x^4 - x^2 + 8)$$

olduğuna göre,  $h(\sqrt{5})$  ifadesinin değeri kaç olabilir?

**Örnek...16 :**

$g$  çift bir fonksiyon ve  $(f^{-1} \circ g)(-x) = m \cdot g(x) + n$  ise  $f(x) = 2x-3$  ise  $m-n$  kaçtır?

**Örnek...17 :**

$f \circ g(x) = 3x-8$  ve  $f(x) = 2x+5$  ise  $g(x)$  fonksiyonunu bulunuz.

**Örnek...18 :**

$f \circ h(x) = 5x+7$  ve  $h(x) = 4x+3$  ise  $f(x)$  fonksiyonunu bulunuz.

**Örnek...19 :**

$u$  ve  $v$  birer fonksiyon,  $u \circ v(x) = 5x-3$  ve  $u(x) = 5x+2$  ise  $v^{-1}(x)$  fonksiyonunu bulunuz.

**Örnek...20 :**

$f(3x+2)=18x+9$  ise  $f(x)$  fonksiyonu nedir?

**Örnek...21 :**

$f(2x-3)=10x-17$  ise  $f(x)$  fonksiyonu nedir?

**Örnek...22 :**

Uygun şartlarda  $f\left(\frac{2x+3}{3x+1}\right)=10x-17$  ise  $f(x)$  fonksiyonu nedir?

**Örnek...23 :**

$f(x+2)=6x+7$  ve  $(g \circ f)(x)=3x+2$  olduğuna göre,  $g^{-1}(x)$  fonksiyonunun kuralını bulunuz?

**Örnek...24 :**

$f$  ve  $g$  bire bir ve örten fonksiyonlar olmak üzere,

$(f^{-1} \circ g \circ h)^{-1} \circ (f^{-1} \circ g)$  ifadesinin eşiti nedir?

**Örnek...25 :**

$$f^{-1}\left(\frac{2x+6}{3+x}\right)=g(x^3+x)$$

olduğuna göre,  $(f \circ g)(10)$  kaçtır?

**Örnek...26 :**

$f^n = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ adet } f}$  olarak tanımlansın,

$f^{-1}(2x+5)=f^3(x^{67}+1)$  olduğuna göre,  $f^4(1)$  kaçtır ?